ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM VĂN TUYẾN

MỘT SỐ VẤN ĐỀ XUNG QUANH ĐIỂM FEUERBACH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM VĂN TUYẾN

MỘT SỐ VẤN ĐỀ XUNG QUANH ĐIỂM FEUERBACH

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS NGUYỄN VIỆT HẢI

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Danh mục hình **ii**

Một số ký hiệu **iii**

Lời cảm ơn **iv**

Mở đầu **1**

1 Điểm Feuerbach và một số tính chất **3**

1.1 Sự xác định các điểm Feuerbach 3

1.2 Điểm Feuerbach và các điểm chân phân giác 10

1.3 Các công thức khoảng cách 14

1.3.1 Khoảng cách từ điểm Feuerbach đến đỉnh tam giác . 14

1.3.2 Khoảng cách giữa các điểm Feuerbach 17

2 Các đường thẳng và các đường tròn đồng quy **21**

2.1 Điểm Feuerbach và các đường thẳng Euler 21

2.1.1 Điểm Feuerbach trong F_e 22

2.1.2 Các điểm Feuerbach ngoài F_a, F_b, F_c 24

2.2 Bốn đường tròn đi qua điểm Feuerbach 28

2.3 Bốn đường thẳng đồng quy 31

3 Tam giác Feuerbach trong tọa độ barycentric **36**

3.1 Tọa độ các điểm Feuerbach 36

3.2 Quan hệ của 3 khoảng cách 43

3.3 Các cặp tam giác phối cảnh 50

3.4 Đường cô nic Feuerbach 54

3.5 Một số ứng dụng khác 57

Kết luận **61**

Tài liệu tham khảo **62**

Danh mục hình

1.1 Đường tròn Euler tiếp xúc trong với đường tròn nội tiếp . . 4
1.2 Đường tròn Euler tiếp xúc ngoài với 3 đường tròn bàng tiếp 6
1.3 Nx là tiếp tuyến 8
1.4 Dựng các điểm Feuerbach bằng compa thước kẻ 9
1.5 Bổ đề 1.2.1 10
1.6 Bổ đề 1.2.2 11
1.7 ΔXYZ và $\Delta F_aF_bF_c$ đồng dạng 13
1.8 Khoảng cách từ F_e đến các đỉnh tam giác 14
1.9 Khoảng cách từ F_a, F_b, F_c đến các đỉnh 17

2.1 6 điểm A, E', F', I, E_1, F_1 nằm trên một đường tròn 22
2.2 Đường thẳng Euler của $\Delta D'Y_1Z_1$ đi qua F_e 23
2.3 Đường thẳng Euler của $\mathbf{T'_a}$ đi qua điểm $S'_c = X_{442}$ 25
2.4 Hyperbol Jerabek đi qua $D', E', F'I, G_e$ 27
2.5 Mệnh đề 2.6 29
2.6 Mệnh đề 2.7 30
2.7 Mệnh đề 2.8 32
2.8 $N_i \equiv X_{942}; P \equiv X_{113}$ 34

3.1 Các điểm Feuerbach và các chân đường phân giác 42
3.2 $F_eE = F_eD + F_eF$ 47
3.3 Điểm Feuerbach ngoài 49
3.4 Tam giác $F_aF_bF_c$ và tam giác XYZ phối cảnh, tâm F_e . . . 52
3.5 Sáu điểm $X_b, X_c, Y_c, Y_a, Z_a, Z_b$ thuộc cô níc 55
3.6 Điểm X_{2160} 59

MỘT SỐ KÝ HIỆU TRONG LUẬN VĂN

Stt	Ký hiệu	Nội dung ký hiệu	Trang
1	D, E, F	Trung điểm của BC, CA, AB	17
2	D', E', F'	Tiếp điểm của đường tròn nội tiếp và cạnh TG	24
3	$\Delta D'E'F'$	Tam giác tiếp xúc trong	28
4	I, O	Tâm nội tiếp và tâm ngoại tiếp ΔABC	6
5	O_9	Tâm đường tròn chín điểm (Euler)	6
6	I_a, I_b, I_c	Tâm đường tròn A, B, C–bàng tiếp	6
7	X, X_a	Chân các phân giác trong và ngoài $\widehat{A}$	13
8	Y, Y_b	Chân các phân giác trong và ngoài $\widehat{B}$	13
9	Z, Z_c	Chân các phân giác trong và ngoài $\widehat{C}$	13
10	F_e	Điểm Feuerbach trong	10
11	F_a, F_b, F_c	Điểm Feuerbach ngoài	10
12	$\Delta F_aF_bF_c$	Tam giác Feuerbach	15
13	$\sigma, \quad \sigma_\theta$	$2S_{ABC}; \quad \sigma.\cot\theta$	40
14	$\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$	$\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}, \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2}, \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$	17

Lời cảm ơn

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của PGS.TS. Nguyễn Việt Hải, Giảng viên cao cấp Trường đại học Hải Phòng. Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và xin gửi lời tri ân nhất của tôi đối với những điều thầy đã dành cho tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn phòng Đào tạo, Khoa Toán Tin, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K11 (2017 - 2019) Trường đại học khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, tháng ... năm 20...
Người viết Luận văn

Phạm Văn Tuyến

Mở đầu

1. Mục đích của đề tài luận văn

Một trong những định lý đẹp nhất của hình học Euclid phẳng là định lý Feuerbach: *Trong mọi tam giác, đường tròn Euler tiếp xúc với đường tròn nội tiếp và ba đường tròn bàng tiếp*. Liên quan đến định lý đó là một loạt các vấn đề được khám phá: Dựng các điểm Feuerbach như thế nào? Các tính chất của điểm Feuerbach có liên quan gì đến điểm và đường thẳng đã biết? Các đường thẳng và đường tròn nào sẽ đi qua điểm Feuerbach? Các tính chất của tam giác Feuerbach... Trình bày cách giải quyết các vấn đề trên là lý do để tôi chọn đề tài "Một số vấn đề xung quanh điểm Feuerbach". Mục đích của đề tài là:

- Trình bày các tính chất của điểm Feuerbach để từ đó đưa ra cách dựng 4 điểm Feuerbach tối ưu nhất.

- Bằng phương pháp sơ cấp, tìm hiểu các đường thẳng và đường tròn có tính chất gì sẽ đi qua các điểm Feuerbach.

- Phát hiện ra các cặp tam giác vị tự liên quan đến điểm Feuerbach. Kết hợp với tọa độ barycentric tìm ra mối quan hệ giữa các khoảng cách.

2. Nội dung đề tài, những vấn đề cần giải quyết

Nội dung chia làm 3 chương:

Chương 1. Điểm Feuerbach và một số tính chất

Chương này giới thiệu định lý Feuerbach và các tính chất cơ bản của điểm Feuerbach trong và điểm Feuerbach ngoài, xác định khoảng cách từ các điểm Feuerbach đến các đỉnh và khoảng cách giữa các điểm Feuerbach. Nội dung bao gồm các mục (tổng hợp, bổ sung từ sách tham khảo [1] và các bài báo [3], [6]):

1.1. Sự xác định các điểm Feuerbach

1.2. Điểm Feuerbach và các điểm chân phân giác

1.3. Các công thức khoảng cách.

Chương 2. Các đường thẳng và các đường tròn đồng quy

Nội dung chương này chủ yếu là tìm các đường tròn đi qua mỗi điểm Feuerbach, các đường thẳng chứa điểm Feuerbach đồng quy tại tâm Euler. Ngoài ra là mối quan hệ của các điểm Feuerbach với các đường thẳng Euler. Chương này bao gồm các mục sau (tổng hợp, bổ sung từ [2], [5]):

2.1. Điểm Feuerbach và các đường thẳng Euler

2.2. Bốn đường tròn đi qua điểm Feuerbach

2.3. Bốn đường thẳng đi qua tâm Euler

Chương 3. Tam giác Feuerbach trong tọa độ barycentric

Chương 3 xét các tính chất của tam giác Feuerbach, đặc biệt khảo sát các cặp tam giác vị tự liên quan đến điểm Feuerbach. Dùng tọa độ barycentric để xác định tọa độ các điểm Feuerbach, lập phương trình các đường thẳng, chứng minh mối quan hệ giữa các khoảng cách từ điểm Feuerbach và kết thúc bằng việc xét đường cô níc Feuerbach. Chương này được tham khảo và tổng hợp theo các bài báo [3].

Nội dung của chương được chia thành 5 phần:

3.1. Tọa độ các điểm Feuerbach

3.2. Quan hệ của 3 khoảng cách

3.3. Các cặp tam giác vị tự

3.4. Đường cô nic Feuerbach

3.5. Một số ứng dụng khác

Chương 1

Điểm Feuerbach và một số tính chất

Trong tam giác ABC, 9 điểm sau nằm trên một đường tròn: 3 trung điểm 3 cạnh, 3 chân đường cao, 3 trung điểm của đoạn thẳng nối trực tâm đến đỉnh tam giác. Đường tròn đó là đường tròn Euler, tên nhà toán học vĩ đại tìm ra nó (hay còn gọi là đường tròn chín điểm). Nếu (O, R) là đường tròn ngoại tiếp tam giác thì bán kính đường tròn Euler bằng $\frac{R}{2}$, tâm đường tròn Euler ký hiệu là O_9, thẳng hàng với tâm O và trực tâm H. Ngoài ra 4 điểm O, H, O_9 và trọng tâm G tạo thành một hàng điểm điều hòa. Chính đường thẳng chứa 4 điểm đó được gọi là đường thẳng Euler.

Ta có kết quả đặc sắc sau: Với tam giác ABC cho trước, đường tròn Euler tiếp xúc trong với đường tròn nội tiếp (I, r) và tiếp xúc ngoài với mỗi đường tròn bàng tiếp $(I_a, r_a), (I_b, r_b), (I_c, r_c)$. Bốn tiếp điểm đó là những điểm đặc biệt của tam giác. Kết quả nổi tiếng này thuộc về Feuerbach. Nội dung chương 1 trình bày cách xác định các điểm Feuerbach và các tính chất đặc biệt của chúng. Một số kết quả mới của các điểm này được tham khảo chính trong [3] với sự chọn lọc và sắp xếp cần thiết.

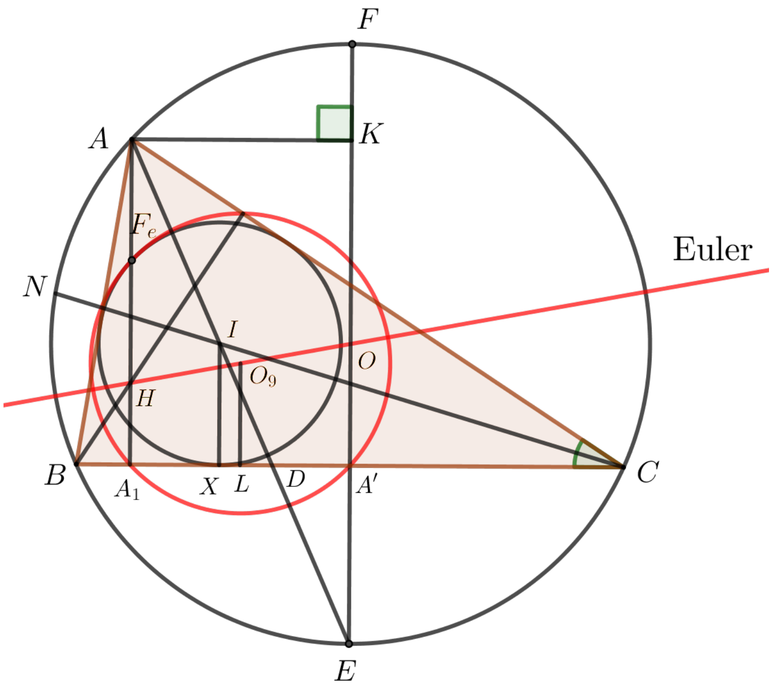
1.1 Sự xác định các điểm Feuerbach

Ta sẽ tách định lý Feuerbach thành 2 mệnh đề. Định lý có nhiều cách chứng minh, ở đây ta sẽ trình bày phép chứng minh bằng hình học thuần túy tham khảo trong [1].

Mệnh đề 1.1 (Feuerbach,[1]). *Trong tam giác ABC đường tròn Euler*

(O_9) *tiếp xúc trong với đường tròn nội tiếp* (I, r).

Chứng minh.



Hình 1.1: Đường tròn Euler tiếp xúc trong với đường tròn nội tiếp

Gọi EOF là đường kính vuông góc với BC, AE là tia phân giác đi qua I. Hạ $AK \perp EF, O_9L \perp BC$, ta có

$$\begin{aligned} OK &= AA_1 - OA' = AH + HA_1 - OA' \\ &= 2OA' + HA_1 - OA' \\ &= OA' + HA_1 = 2O_9L. \end{aligned}$$

ΔAKF đồng dạng ΔIDX (các cạnh tương ứng vuông góc). Vậy

$$\frac{FK}{AK} = \frac{DX}{IX} \quad \text{hay} \quad \frac{FK}{A'A_1} = \frac{DX}{IX}. \text{ Từ đó,}$$

$$IX.FK = A'A_1.DX \tag{1.1}$$

Ta sẽ chứng minh $A'A_1.DX = XA'.XA_1$.